נושאים במתמטיקה

בשביל התירגול

תוכן העניינים

נושאים במתמטיקה

פרק 1 - תחשיב הפסוקים

תוכן העניינים

נושאים במתמטיקה

פרק 2 - לוגיקה

תוכן העניינים

לוגיקה

שאלות

1) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$

ב. $\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg r)$

ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$

ד. $(p\vee q)\rightarrow(q\rightarrow r)$

2) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

3) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p\rightarrow q)$ $p\wedge(\neg q)$

ב. $(\neg p)\rightarrow q$ $p\vee(\neg q)$

ג. $p\rightarrow(\neg q)$ $\neg(p\wedge q)$

ד. $(p\vee q)\wedge(\neg q)$ $p\wedge(\neg q)$

ה. $p\leftrightarrow q$ $(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

ו. $(s\rightarrow(p\wedge(\neg r)))\wedge((p\rightarrow(r\vee q))\wedge s)$ $p\vee u$

ז. הראו כי $\neg(r\wedge(p\vee q))\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))\vee\neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

4) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $\downarrow$ באמצעות $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ בלבד.

בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

יג. $p\to q$

יד. $(p\vee q)\wedge\neg r$

טו. $(p\to q)\to(r\to\neg q)$

5) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים:

$$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$$
$$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$$
$$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$$
$$\beta:D\vee(B\wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

6) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p \vee (\neg p)$

ב. $p \vee (p \to q)$

ג. $(p \to q) \vee (q \to r)$

ד. $(p \wedge (p \to q)) \to q$

ה. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

ו. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$

ז. $(q \vee p \vee r) \to ((\neg p) \to ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח. $((B \to (C \wedge (\sim A))) \wedge (((\sim B) \vee C) \to D) \wedge (E \to (\sim D))) \to (A \to \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))) \to (((p \to r) \wedge ((\neg q) \to p) \wedge (\neg r)) \to q)$$

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לוייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.
ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומים):

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\rightarrow q)\Rightarrow q$

ד. $p, p\rightarrow q\Rightarrow q$

ה. $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge p$

ז. $A\rightarrow B, C\rightarrow B, D\rightarrow(A\vee C), D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\rightarrow D), D\rightarrow(C\vee P), P\rightarrow Q, (\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\rightarrow(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\rightarrow D)\ ,\ (E\rightarrow(\sim D))\models(A\rightarrow\sim E)$

11) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.
ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.
ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$.
ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.
ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$.
ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.
ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$.
ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.
ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$.
י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.
יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha, \beta \models \gamma$.
יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

12) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(x < y))$
ב. $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(x > y))$
ג. $\forall x, y \in \mathbb{R}(x > y) \to \exists z \in \mathbb{R}(x > y + z)$
ד. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0) \to (\exists n \in \mathbb{N}(x > \tfrac{1}{n}))$
ה. $\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \to \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R}(xz = y))$
ו. $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 1 \to \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}(xz = y))$
ז. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \to \exists y \in \mathbb{N}(xy > 1))$
ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy = x \wedge x + y < 5) \to y < 4\tfrac{1}{2}$
ט. $\forall x \in \mathbb{R}((x > 0) \to \forall y \in \mathbb{R}(\exists n \in \mathbb{N}(nx > y)))$

14) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבור הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x P(x) \to \exists x\, P(x)$

ב. $\exists x P(x) \to \forall x\, P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \to \left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right) \to \left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \to \left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \to \left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \to \left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right) \to \left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \to \left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right) \to \left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

15) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן:

$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$

$Q(x): x \text{ is odd}$

$R(x): x > 0$

$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x\left[P(x) \to Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x) \to P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x) \to Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x) \to P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x) \to Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x) \to Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x) \to P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x) \to \neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x) \vee Q(x)\right) \to R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x) \to \left(Q(x) \wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x) \to \left(Q(x) \wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(,),\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

16) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- $\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\to Y$.
נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\to P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$.
הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.
השתמשו רק בסימנים הבאים:
סימני המשתנים x,y,B,C, סימני הקבוצות X,Y, סימן הפונקציה f, סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו- P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\to B$ ולכל פונקציה $g:B\to A$, אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.
מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, קשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\to$, והסימנים f,g, B^A,A^B, $\in,(,),\forall,\exists$.
למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- $\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1, x_2, \cdots$,
הקשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \leftrightarrow$ והסימנים $|, =, \cdots, 1, 2, 3, \leq, \mathbb{N}, \in, (,), \forall, \exists$.
הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, z, סימני הקבוצות $A, \mathbb{N}$ וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$.
מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.
אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח״ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, סימני הקבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f, g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=, \neq, \in, \{,\}, (,), \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \forall, \exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1, x_2, \cdots$,
הקשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \leftrightarrow$ והסימנים $0, \leq, \mathbb{R}, \in, (,), \forall$.
דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

17) נתונה הקבוצה $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \forall y\left[\left(y \in \{t \in \mathbb{N} | t > 3\} \rightarrow (y > x)\right)\right]\right\}$.
כתבו אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} | .....\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

18) תארו במדויק את הקבוצה:
$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \exists y \in \mathbb{N}\ \left(x = y^2\right) \rightarrow (x > 2)\right\} - \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| > 1\right\}$.

19) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:
1. $\Rightarrow p \to p$
2. $p \Rightarrow q \to p$
3. $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

20) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$
$C \to B$
$D \to (A \vee C)$
$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$
$P \wedge Q \Rightarrow P$
$P \wedge Q \Rightarrow Q$
$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$
$P, P \to Q \Rightarrow Q$
$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
$P \Rightarrow \neg\neg P$
$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$

21) הוכיחו:
א. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.
ב. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.
ג. אם $m,n \in \mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.
ד. אם $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k \in \mathbb{N}$, כך ש- $m^2 - k^2 = n$.
רמז: חפשו $m,k \in \mathbb{N}$ עוקבים.
ה. אם $a,b,c \in \mathbb{N}$ וגם $a \mid b$ וגם $a \mid c$, אז $a \mid b+c$.

22) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y\notin\mathbb{Q}$, כך ש- $x^y\in\mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=z^2$.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

23) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t\in\mathbb{Q}$, כך ש- $p-t\notin\mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r\in\mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q=\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q\neq\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

24) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הו אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 3, אז $z^2=1\bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:
אם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 4, אז z^2 לא מתחלק ב- 4.

26) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n\bmod(3)=2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.

נושאים במתמטיקה

פרק 3 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- □ את הסימן המתאים, $\not\subseteq,\subset,\subseteq,\notin,\in$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\,\square\,\{1,\{1\}\}$
ב. $\{1\}\,\square\,\{1,\{1\}\}$
ג. $\{8,\varnothing\}\,\square\,\{1,2,8\}$
ד. $\varnothing\,\square\,\{1,2\}$
ה. $\varnothing\,\square\,\{\varnothing,1,2\}$
ו. $\{2\}\,\square\,\{\{1,\{2\}\}\}$
ז. $\{2\}\,\square\,\{2,\{2,\{2\}\}\}$
ח. $\{2\}\,\square\,\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
ט. $\{2\}\,\square\,\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$
י. $\{\{2\},\varnothing\}\,\square\,\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
יא. $\varnothing\,\square\,\{1,\{\varnothing\}\}$
יב. $\{\varnothing\}\,\square\,\{1,\{\varnothing\}\}$
יג. $\{1,2\}\,\square\,\{1,\{2\}\}$
יד. $1\,\square\,\mathbb{N}$
טו. $\{1\}\,\square\,\mathbb{N}$
טז. $1\,\square\,\{\mathbb{N}\}$
יז. $\{1\}\,\square\,\{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1)
א. $\in$
ב. $\in,\subseteq,\subset$
ג. $\notin,\not\subseteq$
ד. $\notin,\subseteq,\subset$
ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$
ז. $\notin,\subseteq,\subset$
ח. $\in,\subseteq,\subset$
ט. $\in,\subseteq,\subset$
י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$
יב. $\in,\not\subseteq$
יג. $\notin,\not\subseteq$
יד. $\in,\notin$
טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$
יז. $\notin,\not\subseteq$

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2 \notin P(A)$

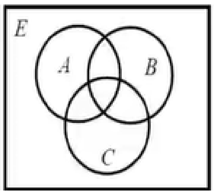
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות :

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

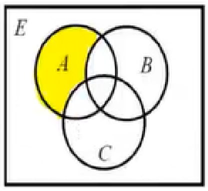
ו. $A\cap(B\cap C)$

ז. $(A\cup B)\cup C$

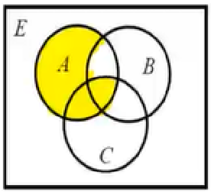
ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

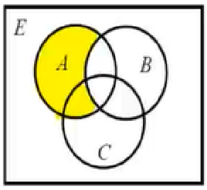
1) א.



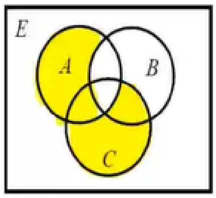
ב.



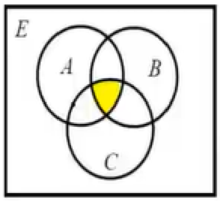
ג.



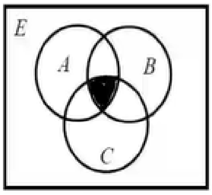
ד.



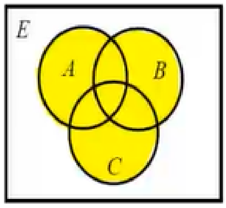
ה.



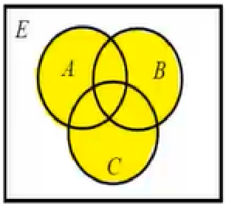
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\rightarrow x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\rightarrow x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\rightarrow x^2<67\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

י. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ______.

יב. $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

יג. $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$
יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:
1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \ V \ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(B\subseteq A)\vee(A\subseteq B)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

נושאים במתמטיקה

פרק 4 - פונקציות

תוכן העניינים

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

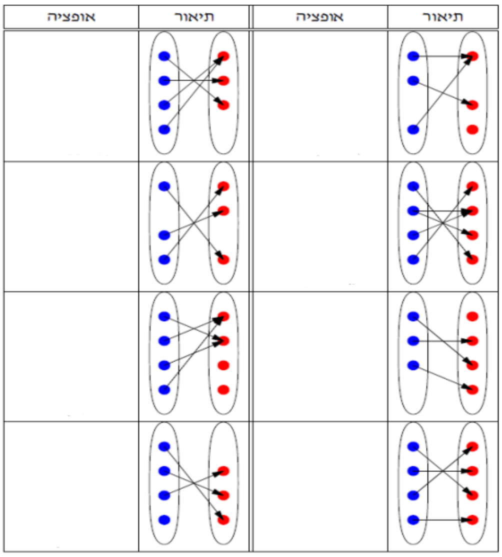
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח״ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח״ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח״ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח״ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).
חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\operatorname{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח״ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע״י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע״י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע״י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע״י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע״י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע״י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע״י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע״י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע״י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע״י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע״י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע״י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח״ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע״י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע״י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח״ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\operatorname{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}|\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$ היא חח״ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח״ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח״ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח״ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח״ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח״ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח״ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח״ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח״ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח״ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח״ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו.מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז.מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח.מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

x) $t\in f(D)\Leftarrow$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

y) $\alpha\in D\Leftarrow f(\alpha)\in f(D)$

z) $\alpha\in f^{-1}(E)\Leftrightarrow F(\alpha)\in E$

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E\subseteq B$, $D\subseteq A$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D)=D$

ב. $f(D)\neq D$

ג. $f^{-1}(E)=E$

ד. $f^{-1}(E)\neq E$

ה. $f(D)\subseteq f(A)$

ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$

ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט. f על אם"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

י. f חח"ע אם"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.

$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.

כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.

הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ג. אם f חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1\ ,\ E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$

ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

7) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\supseteq D$

ג. אם f חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ד. אם f לא חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$ אז f אינה חח"ע.

י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

יב. אם f לא חח"ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

8) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$.

ד. אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ה. אם f על אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f חח"ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f\left(\beta\right)\neq\alpha$.

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.
א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.
ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.
ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.
ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in\mathbb{N}\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in\mathbb{N}\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \qquad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \qquad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad g(n)=10n \qquad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \qquad f(x)=2x-1$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:
$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}$.
חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}$.
חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|+3}}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\triangle\mathbb{Z}$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd}\\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in \mathrm{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\qquad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:
א. אם g היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.
ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$, $f(\{2,3\})=\{3\}$.
א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח"ע?
ה. האם הפונקציה על?

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **ממש** ל-A. נתונות הפונקציות

$f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:

הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$,

היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$

הוכיחו כי $\{f\circ h \mid f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על,

אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).

הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.

ב. אם $g\circ f$ חח"ע אז f חח"ע.

ג. אם $g\circ f$ חח"ע אז g חח"ע

ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.

ה. אם $g\circ f$ על אז f על.

ו. אם $g\circ f$ על אז g על.

ז. אם $g\circ f$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

ח. אם $g\circ f$ על וגם f חח"ע אז g על.

ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד) :
א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.
ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.
ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.

נושאים במתמטיקה

פרק 5 - פונקציות מפוצלות

תוכן העניינים

נושאים במתמטיקה

פרק 6 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b > a+3$, כאשר:
א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
ב. $A=\{3,5,19,103\}$
ג. $A=\{5,6,7\}$

2) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,
$R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ $\quad$ $R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$
עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_2 , R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.
א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in T \Leftrightarrow x^2+y\ge 1$.

4) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
א. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$
ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$
ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ (x=my \vee y=mx)$

5) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)\Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב-A.

6) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.
בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.

ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.

ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

7) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):

א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.

ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.

ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.

ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.

ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

נושאים במתמטיקה

פרק 7 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$

$R_1 \to 5R_1-8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

8)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

10)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

12)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

15)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16)
$$\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$$

17)
$$\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$$

18)
$$\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$$

19)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$$

20)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$$

21)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$$

22)
$$\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$$

23)
$$\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$$

24)
$$\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$$

25)
$$\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$$

26)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$$

27)
$$\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

16) $(x,y)=(1,2)$

17) $(x,y)=(5-2t,t)$

18) ϕ

19) ϕ

20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ

24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$ ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

10)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

13) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1 \\ y+2z&=2 \\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור a,b,c,d, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור b,c,d, כך שלכל a, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

14) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}.$$

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

15) נתונות המשוואות של 3 מישורים:
$$\begin{cases} 3x+my=3 \\ mx+2y-mz=1 \\ -x+mz=-1 \end{cases}.$$

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע m שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצאו נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצאו נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

תשובות סופיות

1) .1 $k\neq1,\ k\neq-2$ .2 $k=1$ .3 $k=-2$

2) .1 $k\neq1,\ k\neq-2$ .2 $k=-2$ .3 $k=1$

3) .1 $k\neq-1,\ k\neq\frac{4}{7}$ .2 $k=\frac{4}{7}$ .3 $k=-1$

4) .1 $k\neq1,\ k\neq-0.4$ .2 $k=1,\ k=-0.4$

5) .1 $k\neq\pm1,\ k\neq-2$ .2 $k=\pm1, k=-2$

6) .1 $k\neq-1,\ k\neq-3,\ k\neq2$ .3 $k=-1,\ k=-3,\ k=2$

7) .1 $k=-1$ .2 $k\neq\pm1$ .3 $k=1$

8) .2 $k=3$ .3 $k\neq3$

9) .1 $k\neq1$ .2 $k=1$

10) .1 $a\neq2$ .2 $a=2,\ b\neq-3$ .3 $a=2, b=-3$

11) .2 $b\neq2.5$ או $a\neq-6$. .3 $a=-6,\ b=2.5$

12) .2 $a=2,\ b\neq2$ .3 $a=2,\ b=2$ או $a\neq2$.

13) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

14) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. .1 $k\neq-1$, $k\neq2$ . .2 $k=-1$ .3 $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t,0.8t,t)$

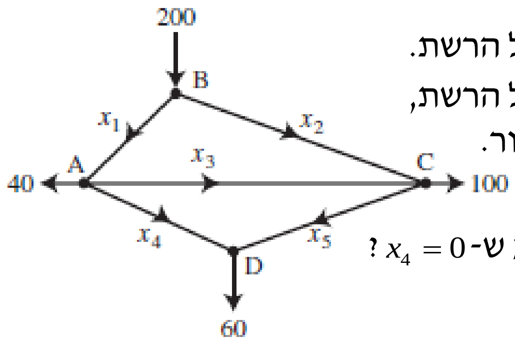
ה. $k=\pm2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

15) א. $m\neq0,-2,3$ ב. $m=-2,3$ ג. $m=0$ ד. לא.

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



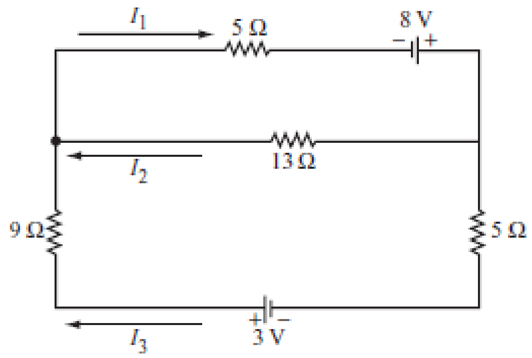
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

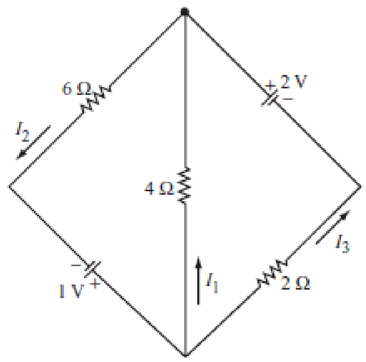
ג. מהו הערך המינימלי של x_1, אם ידוע ש-$x_4 = 0$?

בשאלות **2-3** מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):

2)



3)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**

תשובות סופיות

1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$. ג. 40.

2) א. $I_1=\frac{255}{317},\ I_2=\frac{97}{317},\ I_3=\frac{158}{317}$

3) $I_1=-\frac{5}{22},\ I_2=\frac{7}{22},\ I_3=\frac{6}{11}$

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות

שאלות

1) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

3) נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי m, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k, עבורם למערכת פתרון.
ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

4) נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

5) נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

6) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-A' את הצורה המדורגת של A.

ידוע כי בממ״ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את A.

תשובות סופיות

1) פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

2) למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

3) א. $m=-3$ ב. $k=-2$. ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t,t,t).

4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.

5) א. $m\neq 0,-2,3$. הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.

ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,

אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.

ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

6) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}$$

נושאים במתמטיקה

פרק 8 - מטריצות

תוכן העניינים

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.
ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.
א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש-A ו-B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות AB ו-$A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. כתבו את המטריצות A ו-B בצורה מפורשת.
ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $A-A^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T$.

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 6×2 ח. לא ט. 6×4 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

17) א.
$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}$$

ב. $c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

18) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X :

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B+I$.

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.
הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.
הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I.

19) נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $A-I$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C, אז A דומה ל- C.
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\ge 2$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח A הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

23) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-B^2+BA היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

24) תהיינה A,B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה AB לא הפיכה.

ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.

הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-A מטריצה אלכסונית.

ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל n טבעי.

26) נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים a,b,c,d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

27) נתון כי $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א. $$\begin{aligned} \alpha_{11}x+\alpha_{12}y &= \alpha_{13} \\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y &= \alpha_{23} \\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y &= \alpha_{33} \end{aligned}$$

ב. $$\begin{aligned} \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w &= 0 \\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w &= 1 \\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w &= -4 \end{aligned}$$

ג. $$\begin{aligned} \alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z &= 3 \\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z &= 1 \\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z &= 1 \end{aligned}$$

28) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו- $A-I$ הפיכות.

29) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$B^2A=-2B^3$ (1) וגם $B^3+AB^2=3I$ (2).

הוכיחו ש-A ו-B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו-B^{-1} באמצעות B.

30) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש-$BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש-B הפיכה.

ב. ידוע ש-B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n=0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו-$I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+...+\frac{1}{n!}A^n+...$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.

32) נתונות שתי מטריצות, A ו-B, מסדר n.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל-A ול-A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C (B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

18) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

19) א. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$

20) א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$

27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד

מטריצה אלמנטרית

שאלות

1) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

2) רשמו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו-B מתקבלת מ-A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ-A^2.

ב. BA מ-A^2.

ג. B^2 מ-BA.

ד. B^2 מ-AB.

4) תהי $A\in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה E_2E_1A ?

פתרו בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

1)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}}_{e_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{A}$$

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{e_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{e_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_4}\bullet$$
$$\bullet\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_6}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{e_7}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{e_8}=A$$

3) שאלת הוכחה.

4) -3

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות

1) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.

א. אזי בהכרח מתקיים: $AB = BA$.

ב. אם $A^2 - AB = I_n$ אז בהכרח B הפיכה.

ג. אם $(AB)^{100} = I$ אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.

ד. אם $(AB)^{100} = 0$ אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהיינה A,B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB$ היא מטריצה היחידה.
הוכיחו ש-$AB = BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-$B^2 + BA$ היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

3) תהיינה A,B מטריצות כלשהן. אזי בהכרח:

א. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ב. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A,B מטריצות ריבועיות.

ג. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

ד. אם A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, וכן $rank(A) > rank(B)$,
אזי $rank(AB) > rank(B)$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

4) תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$, כך ש- $AB=BA$.
א. אם A,B סימטריות הוכיחו כי AB^2 סימטרית.
ב. נניח כי $rankA=n-1$ ו- $v\neq 0$ הוא וקטור המקיים $Av=0$,
הוכיחו כי Bv הוא כפולה של v בסקלר.

5) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אזי בהכרח מתקיים:
א. $AB=BA$
ב. אם $A^2-AB=I_n$ אז בהכרח $AB=BA$.
ג. אם $(AB)^{100}=I$ אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.
ד. אם $(AB)^{100}=0$ אז בהכרח $(BA)^{100}=0$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

6) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג (בשורות).
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:
א. B^2 מ- A^2.
ב. BA מ- A^2.
ג. B^2 מ- BA.
ד. B^2 מ- AB.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

1) ג+ד **2)** הוכחה. **3)** ה **4)** הוכחה.
5) ב+ג **6)** ב+ד

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א.
$$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

בשאלות **2-6** נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

2) $A\underline{x}=\underline{b}$

3) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$

4) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

5) $A\underline{x}=\underline{x}$

6) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

7) פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}\ ,$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

8) פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}\ ,$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,-8,4)$.
הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10) למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$, $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

11) נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

12) נתון $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים k,m .

13) נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
הוכיחו ש- A מטריצה **לא** הפיכה.

14) נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת k .

15) מטריצה A מקיימת $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

16) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח A לא הפיכה.
ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.
ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

17) נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$: $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ v=(y_1,y_2,1,2),\ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
א. $x=au+bv+cw$
ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$
ג. $x=au+bv+w$
ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$
ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

18) נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם u וגם λu $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
ב. אם u ו- v וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
ג. אם הווקטורים $(1,2,\dots,n),\ (n,\dots,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,\dots,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

20) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^T A\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^T x=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^T A=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

23) תהא $A\in M_{4\times 4}\left(R\right)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

24) נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&3\\2&4&1&3&6\\-3&-6&3&-8&-8\end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C\neq D$ ו- $AC=AD=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

ב. $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

2) $$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

7) $(x,y,z)=(1,2,3)$

8) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

9) שאלת הוכחה.

10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

11) אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.
אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.
אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

12) $m=5, k=9$

13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-t,-2s,s,-t,-t,t)$

ג. $D=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ -2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}(t=s=1)$ $\quad C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}(t=s=0)$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.

דרגה של מטריצה

שאלות

1) אמתו את המשפט $rank(A)=rank(A^T)$,

על המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

2) אמתו את המשפט $rank(AB)\le \min\{rank(A), rank(B)\}$,

עבור $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix}$.

חשבו את $rank(A)$.

4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n>1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $rank(A)=n-1 \Rightarrow rank(A^2)=n-1$

ב. $rank(A)=n-1 \Leftarrow rank(A^2)=n-1$

5) נתון כי A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n>1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $rank(A)=rank(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש-$rank(A)<rank(AB)$.

ג. אם $rank(A)>rank(B)$, אז $rank(AB)>rank(B)$.

6) נתון $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $rank(B)$, $rank(A)$.

ב. חשבו את $rank\left(B^{10}A^{14}\right)$.

7) נניח כי A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n.

הוכיחו כי $rank\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}\le 2rank(A)+rank(B)$.

8) תהי A_{8x7} מטריצה, כך ש- $rank(A)=3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1,A_2,A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A=A_1+A_2+A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר mxn שדרגתה k.

9) נתונות שתי מטריצות $B_{5\times3}$, $A_{3\times5}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(AB)\ne rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

10) תהי A מטריצה מסדר $m\times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n\times m$.

הוכיחו:

א. אם $AB=I_m$ אז $rank(A)=rank(B)=m$.

ב. אם $BA=I_n$ אז $rank(A)=rank(B)=n$.

ג. אם $AB=I_m$ וגם $BA=I_n$ אז בהכרח $m=n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T=I_m$ וגם $A^TA=I_n$.

11) בשדה **F** נתונים $a_1,a_2,...,a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1,b_2,...,b_n$ איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M=\left(m_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, כאשר $m_{ij}=a_ib_j$.

12) תהי $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=b_i^2-b_j^2$, כאשר $b_1,b_2,...,b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n\ge 3$.
א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.
ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n\ge 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A,B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m\times n$, כך שלכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $x\neq\underline{0}$, מתקיים $A\underline{x}\neq B\underline{x}$.
מה הדרגה של המטריצה $A-B$?

14) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n\times n$.
א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x}=\underline{0}$, הוא פתרון של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$.
הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A.
ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB)=\rho(A)$.
ג. הוכיחו שאם $\rho(AB)<\rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.
א. הוכיחו כי $P(A)\subseteq P(A^2)$.
ב. נתון כי $\rho(A^2)<\rho(A)$.
הוכיחו שקיים $v\in\mathbb{R}^n$, כך ש- $Av\neq 0$ וגם $A^2v=0$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) אם $k=1$, אז $rank(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $rank(A)=3$.
אם $k \neq 1,4,10$ $rank(A)=4$.
4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
ג. הטענה אינה נכונה.
6) א. $rank(B)=3$, $rank(A)=2$. ב. $rank\left(B^{10}A^{14}\right)=2$
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) 1
12) שאלת הוכחה.
13) n
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.

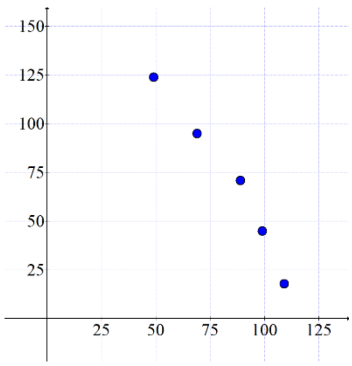
שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה ליניארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור : $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.

$price(x)$	$Demand\ /\ sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18



א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.
ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ״ל.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.
ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
ד. 14.41

נושאים במתמטיקה

פרק 9 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות **1-5** חשבן את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבן את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

8)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

9)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

10)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס :

11) א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$$

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

17) הוכיחו כי : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשבו : $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- k $(1 \le k \le n)$.
תהי C מטריצה הזהה למטריצות A ו- B אך נבדלת מהן בשורה ה- k, שם היא שווה לסכום השורה ה- k של A והשורה ה- k של B.
הוכיחו כי $|A| + |B| = |C|$.

ב. חשבו : $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix}$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\dots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

הפיכה:
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&\cdots&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\\ a_0&a_1&\cdots&\cdots&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}?$$

2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n?

3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}$.

6) חשבן את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

7) חשבן את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

8) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} \min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1\ or\ \ j=1 \end{cases}$.

חשבן את $|A|$.

9) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} \min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1\ or\ \ j=1 \end{cases}$.

חשבן את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

10) חשבן את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \quad \left(a_{ij}=\begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2\leq i\leq n,\ j=1 \\ 1 & 2\leq j\leq n,\ i=1 \\ x & else \end{cases} \right).$$

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j \end{cases}$.

חשבן את $D_n=|A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

12) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

13) נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה B.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

14) חשבו את $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$.

15) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} i & i+j=n+1 \\ 2 & else \end{cases}$.

16) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} a & & & b \\ & & b & \\ & \iddots & & \\ b & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} b & i+j=n+1 \\ a & else \end{cases}$.

17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. A הפיכה אם ורק אם $a_0 \neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$
ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13) $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\end{cases}$$

15) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n\ even\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n\ odd\end{cases}$$

16) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ odd\end{cases}$$

17) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n\ even\end{cases}$$

18) $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ even\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ odd\end{cases}$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4,\ |B|=2$.
חשבו:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^{2}B^{3}|$

2) א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|,|B|$.

6) הוכיחו: .1 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ .2 $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^{T}A^{2}$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\dfrac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\dfrac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

10) נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18, |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכת המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

4) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$
,

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הצמודה הקלסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4) נתון: $A=\begin{pmatrix}-9 & 26 & -1 & 14 & 10\\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0\\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0\\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$.

5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל-±1, כאשר כל איברי A ו-A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

6) נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.
הוכיחו ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

7) נתון ש-A הפיכה.
הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^{T} הפיכות.

8) נתון כי A,B הפיכות ו-C,D לא הפיכות.
האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצאו את ערכי k עבור המטריצה $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3\times5}$, $B_{5\times3}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. $|AB| = |BA|$
ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3\times3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4,
אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:
א. $4^3 |A|^3$
ב. $4^3 |B|^3$
ג. $4 |B|^3$
ד. $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. $|A| = 4$
ב. A הפיכה.
ג. $adj(A) = 0$
ד. $|A| = 0$

14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:

א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.

ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.

ג. ייתכן ש-$\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש-$a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.

לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=n!-1$

ב. A הפיכה.

ג. $adj(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n=4$, אז $|Adj(A)|>214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 4$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

17) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,
אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|Adj((-1+i)A)|=i$.

חשבו $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj\left(A^{-1}\right)=\left(Adj(A)\right)^{-1}$

ג. $\left|Adj(A)\right|=|A|^{n-1}$

תשובות סופיות

1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4) א. 240 ב. 0.5

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.
ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

9) אם ורק אם $k=0$.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) ד

13) שאלת הוכחה.

14) ד

15) ד

16) שאלת הוכחה.

17) ד

18) $2^{\frac{-5}{2}}$

19) שאלת הוכחה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות

1) אם B מתקבלת ממטריצה A 3×3, ע"י כפל העמודה הראשונה ב-7,
אז $|adj(A)B|$ היא:

א. $|A|^3$

ב. $|B|^3$

ג. $|A||B|^2$

ד. $|A|^2|B|$

2) A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, $B\neq0$, אז:

א. אם $AB=0$, אז $A=0$.

ב. אם $AB=0$, אז $|A|=0$.

ג. אם $|AB|=0$, אז $A=0$.

ד. אם $|AB|=0$, אז $|A|=0$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

3) B מטריצה 5×3, A מטריצה 3×5, אז בהכרח:

א. $\det(AB)=\det(BA)$

ב. $rank(AB)=rank(BA)$

ג. $rank(AB)\neq rank(BA)$

ד. $adj(AB)\neq adj(BA)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

4) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ-A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 7,
אז $adjB$ מתקבלת מ-$adjA$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 7.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 7.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 7.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 7.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח $|A|=0$.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת ההומוגנית $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד,
אז השורות של A תלויות ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

6) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 4$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n-2$, אז בהכרח $adj(A)=0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $adj(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $adj(A)=0$, אז בהכרח $A=0$.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

7) תהא $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 3$, כך ש- $a_{ij}=i+j-1$.
אז בהכרח מתקיים:

א. $|A|=2$

ב. $|A|=0$

ג. עמודות A בלתי-תלויות ליניארית.

ד. $adj(A)=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

8) תהא A מטריצה ריבועית מסדר 5, ונניח ש- $|adj((-1+i)A)|=i$,
אז **הערך המוחלט של הדטרמיננטה** שווה ל:

א. $\sqrt[4]{2}$

ב. $-3i$

ג. 0

ד. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

9) נניח A,B מטריצות מסדר גודל $n\times n$ המקיימות $A^2-2AB=I_n$.
אז בהכרח מתקיים:
א. B הפיכה.
ב. $|A|=0$
ג. למערכת $ABx=0$ פתרון יחיד.
ד. $AB=BA$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

10) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A, אז:
א. בהכרח $\det(A)=\det(G)$ וגם $adj(A)=adj(G)$.
ב. בהכרח $\det(A)=\det(G)$, אך ייתכן ש $adj(A)\neq adj(G)$.
ג. ייתכן ש- $\det(A)\neq\det(G)$, אך בהכרח $adj(A)=adj(G)$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n\geq 2$, כך ש- $a_{ij}=\begin{cases} i & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$.
לכל $1\leq i,j\leq n$, אז בהכרח מתקיים:
א. $|A|=n!-1$
ב. $|A|\neq 0$
ג. עמודות A בלתי-תלויות ליניארית.
ד. $adj(A)=0$
ה. אף תשובה אינה נכונה.

12) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$. אז בהכרח מתקיים:
א. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.
ב. אם קיים פתרון שונה מ- 0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ- 0.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.
ד. אם למערכת ההומוגנית $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז השורות
של A בלתי-תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

1) ד	2) ב	3) ד	4) ד	5) ב
6) א	7) ב	8) ד	9) ד	10) ד
11) ג	12) ד			

נושאים במתמטיקה

פרק 10 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **8-15** בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **22-30** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	**2)**	כן	**3)**	כן	**4)**	לא	**5)**	לא
6)	כן	**7)**	לא	**8)**	כן	**9)**	כן	**10)**	לא
11)	לא	**12)**	כן	**13)**	כן	**14)**	כן	**15)**	כן
16)	כן	**17)**	לא	**18)**	כן	**19)**	כן	**20)**	לא
21)	לא	**22)**	כן	**23)**	כן	**24)**	כן	**25)**	כן
26)	כן	**27)**	לא	**28)**	כן	**29)**	לא	**30)**	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **7-1** נתונים הווקטורים הבאים:

$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?

ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?

ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?

ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?

ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?

ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&11\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-5\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$

בשאלות **13-11** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=2u_3+u_2,\ \ u_2=u_1-2u_3$.
3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=4u_4-u_2,\ \ u_2=4u_4-u_1$.
4) א+ב+ג. $k=-4$
5) $a=5t+3s,\ b=4t-13s,\ c=7s,\ d=7t$
6) $v=2u_1+u_2+u_3$, אינסוף.
7) $v=\frac{7}{4}u_1+\frac{3}{4}u_2$, אינסוף.
8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A=B+2C$
ב. $A=B+2C,\quad B=A-2C,\quad C=0.5A-0.5B,\quad D=0.25A+0.25B$
9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2=4p_4-p_1$
ב. $p_1=p_2+2p_3,\ \ p_2=p_1-2p_3,\ \ p_3=0.5p_1-0.5p_2,\ \ p_4=0.25p_1+0.25p_2$
10) לכל ערך של $a,\ b,\ c$.
11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x=2y-z,\ \ y=0.5x+0.5z,\ \ z=2y-x$.
12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x=2y-z,\ \ y=0.5x+0.5z,\ \ z=2y-x$.
13) בלתי תלויים ליניארית.
14) תלויים.
15) בלתי תלויים ליניארית.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1 בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

(2 בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 16\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

(3 בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4 נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,
בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \;\middle|\; p(1)=0\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **16-15** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

15) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.
U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.
V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{(p_1(x)=-1+x^3,\quad p_2(x)=-1+x^2,\quad p_3(x)=-1+x)\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.
ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות :

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$

2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$

3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}\ .$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ בת״ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],\dots,[u_m]\}$, הם בת״ל.
הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

נושאים במתמטיקה

פרק 11 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

נושאים במתמטיקה

פרק 12 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$